EL PROCESO DE WIENER Y LA INTEGRAL DE ITO

Miguel Ángel García Álvarez

Facultad de Ciencias, UNAM

1. Introducción

El Cálculo Estocástico es en realidad únicamente Cálculo Integral Estocástico, por lo menos en lo que se refiere a la teoría que quedó prácticamente concluída hacia finales de los años 70's del siglo pasado y que en lo que sigue denominaré Cálculo Estocático Clásico. Después esa teoría se fue ampliando y se desarrolló en varias direcciones. Ahora bien, al igual que ocurrió con el Cálculo Diferencial e Integral que conocemos, la teoría de Integración Estocástica se desarrolló para poderla aplicar en la solución de cierto tipo de problemas de interés. De manera específica, el objetivo es poder resolver las llamadas ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales también son en realidad ecuaciones integrales estocásticas. En el Cálculo Estocástico Clásico no hay derivadas; es decir, no hay un Cálculo Diferencial Estocástico ya que, en general, se trabaja con funciones que no son diferenciables. A su vez, el resolver ecuaciones diferenciales estocásticas tiene por objetivo el poder construir procesos estocásticos que modelen fenómenos de interés en diversas áreas.

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es una relación de la forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

donde $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico, μ y σ son dos funciones reales definidas en $\mathbb{R}^2$ y $(W_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener. Ecuaciones de este tipo se presentan en una diversidad de situaciones. La idea general es que si un sistema dinámico es modelado por una ecuación diferencial ordinaria $\frac{dX}{dt} = \mu(t, X)$ y dicho sistema es perturbado por la presencia de un ruido.ªleatorio, entonces la modelación estaría dada por una ecuación de la forma $\frac{dX}{dt} = \mu(t, X) + \sigma(t, X)\,\xi(t)$, en donde ξ representa la perturbación aleatoria. El ruido ξ se modela usualmente como la "derivada"de un proceso de Wiener, de manera que la última ecuación se escribiría en la forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

μ es llamada el **arrastre** (drift) y σ la **volatilidad**.

El proceso de Wiener es un modelo matemático desarrollado por Norbert Wiener, entre los años entre 1921 y 1923, del movimiento browniano, el cual consiste en el movimiento que presenta una pequeña partícula suspendida en un líquido, el cual es debido a los choques de las moléculas del líquido con la partícula. Fue estudiado a fondo por Robert Brown en el año 1827, de ahí su nombre. La explicación de este movimiento observado por Brown la dio Einstein basándose en la teoría molecular.

Lo que hizo Wiener fue definir un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y, para cada $t \geq 0$, una variable aleatoria $W_t : \Omega \to \mathbb{R}$ de tal manera que la familia $(W_t)_{t\geq 0}$ tenga las propiedades que se considera tiene un movimiento browniano, las cuales son las siguientes:

1. Las posibles trayectorias $t \to W_t$ son funciones continuas.
2. $E[W_t] = 0$ para toda t.
3. Dados $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ es independiente de la trayectoria seguida hasta el tiempo s.
4. Dados $0 \leq s < t$, la distribución de $W_t - W_s$ es una función de $t - s$.

Se puede mostrar que bajo estas condiciones, $W_t - W_s$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s$.

En el modelo desarrollado por Wiener se puede mostrar que, con probabilidad 1, las funciones $t \to W_t$ no son diferenciables; así que $\sigma(X_t, t)dW_t$ no puede entenderse en el sentido usual. En sentido escrito una EDE es en realidad una ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$$

Sin embargo, al no ser diferenciables las funciones $t \to W_t$, tampoco son de variación acotada; de manera que la integral $\int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$ no puede entenderse en el sentido usual, como una integral de Stieltjes.

De ahí la importancia del resultado de K. Ito (Stochastic Integral, 1944) al darle un sentido preciso a una integral de la forma $\int_0^t Z_s dW_s$ para una familia amplia de procesos $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Para entender y exponer la manera en que Ito le dio sentido a una integral con respecto al proceso de Wiener es necesario familiarizarse con algunos conceptos, entre ellos los siguientes:

1. El teorema de Radon-Nikodym.

2. El concepto de esperanza condicional de una variable aleatoria dada una $\sigma-$álgebra.

3. El concepto de Martingala.

4. Los espacios de Hilbert L^2.

5. Los diferentes tipos de convergencia de variables aleatorias.

6. Las propiedades del proceso de Wiener.

Son dos las propiedades básicas del proceso de Wiener que permitieron a Ito definir la integral estocástica $\int_0^t Z_s dW_s$.

1. El proceso de Wiener $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.
2. El proceso $(W_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.

La integral de Ito se define primero para una familia de procesos simples y después se extiende a otro tipo de procesos tomando límites:

Se comienza con procesos de la forma $H_t(\omega) = I_{(a,b]\times F}(t,\omega)$, para los cuales se define:

$\int H_s dW_s = (W_b - W_a) I_F$

$\int_0^t H_s dW_s = \int H_s I_{[0,t]}(s) dW_s$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$

De manera que se tiene:

$$\int_0^t H_s dW_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a) I_F & \text{si } a < t \leq b \\ (W_b - W_a) I_F & \text{si } t > b \end{cases}$$

Definiendo, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \int_0^t H_s dW_s$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

2. $\left(N_t^2 - \int_0^t H_s^2 ds\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

El siguiente paso consiste en definir la integral para un proceso del tipo $Z_t(\omega) = \sum_{k=1}^m c_k H_t^{(k)}(\omega)$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son constantes y, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $H_t^{(k)}(\omega) = I_{(a_k,b_k]\times F_k}(t,\omega)$. Para un proceso de este tipo se define:

$\int_0^t Z_s dW_s = \sum_{k=1}^m c_k \int_0^t H_s^{(k)} dW_s$

Aquí se requiere verificar que esta definición no depende de la representación particular de Z como una suma de la forma $\sum_{k=1}^m c_k H^{(k)}$. Una vez verificado esto, definiendo $N_t = \int_0^t Z_s dW_s$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

2. $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_v^2 dv\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

En particular, como el proceso $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala nula en cero, se tiene, para cada $t \in \mathbb{R}^+$:

$E\left[N_t^2\right] = E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right]$

Esto define una isometría entre dos espacios L^2, la cual permite extender la integral estocástica a todos los procesos que se puedan generar mediante procesos del tipo de los procesos

$(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ definidos arriba. La integral estocástica queda así definida para una familia bastante amplia de procesos, la cual incluye a todos los procesos continuos $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tales que $E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right] < \infty$ para toda $t \in \mathbb{R}^+$.

En lo que sigue asumimos que tenemos definido un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Que sea completo significa que $\mathcal{F}$ contiene a todos los subconjuntos de los conjuntos de probabilidad cero.

2. Teorema de Radon-Nikodym

Definición 1. *Sean μ y ν dos medidas definidas sobre el mismo espacio de medida. Se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ, lo cual será denotado por $\nu \ll \mu$, si $\nu(E) = 0$ para cualquier conjunto medible E tal que $\mu(E) = 0$.*

Teorema 1 (**Radon-Nikodym**). *Supongamos que μ es finita y que ν es absolutamente continua con respecto a μ, entonces existe una función medible no negativa f tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para cualquier conjunto medible E.*

3. Esperanza condicional

El concepto de Esperanza Condicional es básico en la Teoría de la Probabilidad Moderna. Su definición fue formulada por Kolmogorov en su libro de 1933 (*Foundations of the Theory of Probability*), en el cual estableció la formulación de la Teoría de la Probabilidad que prevalece hasta nuestros días. La definición general de la esperanza condicional está basada en el teorema de Radon Nikodym, publicado en el año 1930. Ese teorema fue la conclusión de la investigación que inició Lebesgue acerca de la condición para que una función sea una integral indefinida, la cual consiste en que esa función tiene que ser absolutamente continua. Radon continuó esa investigación y estableció el ahora llamado teorema de Radon-Nikodym para el caso de medidas en $\mathbb{R}^n$. El resultado de Nikodym fue mucho más general ya que lo formuló habiéndose desarrollado ya una teoría general de la medida. Únicamente pasaron 3 años para que Kolmogorov hiciera ver la importancia del resultado de Nikodym en la teoría de la probabilidad.

Ahora el concepto de esperanza condicional es una de las principales bases para el estudio e incluso la definición misma de los procesos estocásticos, ya que precisamente se constituyó en la herramienta central para tratar con variables aleatorias dependientes.

Teorema 2. *Sea X una variable aleatoria de esperanza finita y $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$, existe entonces una variable aleatoria Z, medible con respecto a $\mathcal{G}$, de esperanza finita y tal que $\int_B ZdP = \int_B XdP$ para cualquier conjunto $B \in \mathcal{G}$. Además, si Y es otra variable aleatoria con las mismas propiedades que Z, entonces $Y = Z$ c.s.*

Definición 2. *Sea X es una variable aleatoria de esperanza finita y $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Se dice que Z es una versión de la* ***esperanza condicional de X con respecto a $\mathcal{G}$*** *y se escribe $E[X \mid \mathcal{G}] = Z$ c.s. si Z una variable aleatoria medible con respecto a $\mathcal{G}$, de esperanza finita y tal que $\int_B ZdP = \int_B XdP$ para cualquier evento $B \in \mathcal{G}$.*

La siguiente proposición muestra que la esperanza condicional tiene propiedades similares a las de la esperanza no condicional. Se muestra también que tiene las propiedades que podrían esperarse con una buena definición, por corresponder a la idea intuitiva del concepto. Finalmente, se muestran otras propiedades específicas de la esperanza condicional, las cuales no resultan evidentes a partir de la idea intuitiva.

Proposición 1. *Sean X y Y dos variables aleatorias de esperanza finita, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos subσ-álgebras de $\mathcal{F}$ y c una constante. Se tienen entonces las siguientes propiedades:*

1. $E[c \mid \mathcal{G}] = c$.
2. $E[cX \mid \mathcal{G}] = cE[X \mid \mathcal{G}]$.
3. $E[X + Y \mid \mathcal{G}] = E[X \mid \mathcal{G}] + E[Y \mid \mathcal{G}]$.
4. *Si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $E[X \mid \mathcal{G}] = X$.*
5. $E[E[X \mid \mathcal{G}]] = E[X]$.
6. *Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, entonces $E[E[X \mid \mathcal{H}] \mid \mathcal{G}] = E[X \mid \mathcal{G}]$.*
7. *Si X es independiente de $\mathcal{G}$, entonces $E[X \mid \mathcal{G}] = E[X]$.*
8. *Si $X \leq Y$, entonces $E[X \mid \mathcal{G}] \leq E[Y \mid \mathcal{G}]$.*
9. $|E[X \mid \mathcal{G}]| \leq E[X \mid \mathcal{G}]$.

4. Martingalas

Para cada $t \geq 0$ consideremos una σ-álgebra $\Im_t \subset \Im$, la cual representa la historia hasta el tiempo t, de tal manera que $\Im_s \subset \Im_t$ para $s < t$. A una familia $(\Im_t)_{t\geq 0}$ de este tipo se le llama una **filtración**.

Se dice que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ está **adaptado a la filtración** $(\Im_t)_{t\geq 0}$ si, para cada $t \geq 0$, la función $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ es $\Im_t-$medible.

Se dice que un proceso $(M_t)_{t\geq 0}$ es una **martingala** si se satisfacen las siguientes tres propiedades:

1. El proceso $(M_t)_{t\geq 0}$ está adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t\geq 0}$.
2. Para cada $t \geq 0$, M_t es una variable aleatoria de esperanza finita.
3. Dados $s < t$, se tiene $E\left[M_t \mid \Im_s\right] = M_s$.

5. Espacios L^2

Denotaremos por $\mathcal{L}^2$ al conjunto de variables aleatorias X tales que $\int_\Omega X^2 dP < \infty$.

El conjunto de clases de equivalencia en las cuales queda partido $\mathcal{L}^2$, mediante la relación de equivalencia definida por la igualdad casi en todas partes, será denotado por L^2.

Cada elemento de L^p es un conjunto de variables aleatorias con la propiedad de que cualquier par de ellas son iguales casi en todas partes.

Si $X \in L^2$, definimos $\|X\|_2 = \left(\int_\Omega X^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}$.

Vamos a enunciar, sin demostración, las propiedades que tienen los espacios L^2.

Proposición 2. *L^2 es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Corolario 1. *La función $\|\|_2$, definida sobre L^2, es una norma.*

Teorema 3. *L^2, con la norma $\|\|_2$ es un espacio normado completo; es decir, cualquier sucesión de Cauchy en L^2 es convergente.*

Si $X, Y \in L^2$, definimos $\langle X, Y\rangle = \int_\Omega XY dP$

Proposición 3. *La función $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle$, definida sobre $L^2 \times L^2$ es un producto interior; es decir, satisface las siguientes propiedades:*

$\langle \alpha X + \beta Y, Z\rangle = \alpha \langle X, Z\rangle + \beta \langle Y, Z\rangle$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $X, Y, Z \in L^2$.

$\langle X, X\rangle \geq 0$ para cualquier $X \in L^2$.

$\langle X, X\rangle = 0$ si y sólo si $X = 0$.

Obviamente se tiene $\|X\|_2^2 = \langle X, X\rangle$; de manera que, siendo completo, L^2 es un espacio de Hilbert.

Lema 1. *Toda función simple φ pertenece a L^2.*

El siguiente resultado se utiliza para definir la integral estocástica.

Teorema 4. *El conjunto de las funciones simples es denso en L^2.*

6. Convergencia de variables aleatorias

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias.

1. Se dice la la sucesión X_n **converge en probabilidad** si existe una variable aleatoria X tal que $\lim_{n\to\infty} P\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] = 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$. En ese caso se escribe $\lim_{n\to\infty}(P)X_n = X$, o bien $X_n \xrightarrow{P} X$.
2. Se dice la la sucesión X_n **converge con probabilidad 1**, o casi seguramente, si existe una variable aleatoria X y $A \in \Im$ tales que $P(A) = 1$ y $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ para cualquier $\omega \in A$. En ese caso se escribe $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.
3. Si las variables aleatorias X_n tienen esperanza y varianza finitas, se dice la la sucesión X_n **converge en L^2**, o en media cuadrática, si existe una variable aleatoria X, de esperanza y varianza finitas, tal que $\lim_{n\to\infty} E\left[(X_n - X)^2\right] = 0$.

Un resultado importante es el siguiente:

Proposición 4. *Sea X_n una sucesión de variables aleatorias que converge a la variable aleatoria X con probabilidad 1 o en media cuadrática, entonces X_n converge a X en probabilidad.*

7. Propiedades del proceso de Wiener

Proposición 5. *Si $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Wiener, entonces los procesos $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ y $(W_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ son martingalas.*

Demostración

Para $s < t$, se tiene:

$E\left[W_t - W_s \mid \Im_s\right] = E\left[W_t - W_s\right] = 0$

$E\left[W_t^2 - W_s^2 \mid \Im_s\right] = E\left[(W_t - W_s)^2 \mid \Im_s\right] = E\left[(W_t - W_s)^2\right] = t - s$

Así que, $E\left[W_t \mid \Im_s\right] = W_s$ y $E\left[W_t^2 - t \mid \Im_s\right] = W_s^2 - s$.

■

Teorema 5. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 = b - a$ *en* L^2

donde $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ *es una partición del intervalo* $[a, b]$.

Demostración

Recuérdese que si X es una variable aleatoria con distribución normal de esperanza 0 y varianza σ^2, entonces $E\left[X^{2m}\right] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)\sigma^{2m}$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Sea $\Delta_k = \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$. Se tiene entonces,

$E\left[\Delta_k\right] = t_k - t_{k-1}$

$V\left[\Delta_k\right] = E\left[(\Delta_k)^2\right] - \left(E\left[\Delta_k\right]\right)^2 = E\left[\left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^4\right] - \left(t_k - t_{k-1}\right)^2$

$= 3\left(t_k - t_{k-1}\right)^2 - \left(t_k - t_{k-1}\right)^2 = 2\left(t_k - t_{k-1}\right)^2$

Por lo tanto,

$E\left[\sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} \Delta_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \left(t_k - t_{k-1}\right) = b - a$

Además, como Δ_1, Δ_2, …, Δ_n son variables aleatorias independientes,

$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 - (b-a)\right)^2\right] = V\left[\sum_{k=1}^{n} \Delta_k\right] = \sum_{k=1}^{n} V\left[\Delta_k\right]$

$= 2\sum_{k=1}^{n} \left(t_k - t_{k-1}\right)^2 \leq 2\|P\| \sum_{k=1}^{n} \left(t_k - t_{k-1}\right) = 2(b-a)\|P\|$

Por lo tanto,

$\lim\limits_{\|P\|\to 0} E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 - (b-a)\right)^2\right] = 0$

■

Al límite $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$ se le llama la **variación cuadrática de** (W_t) en el intervalo $[a,b]$.

Corolario 2. *Las trayectorias del proceso de Wiener no son de variación acotada.*

El hecho de que las trayectorias del proceso de Wiener no sean de variación acotada se refleja en problemas del siguiente tipo:

Proposición.

1. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$
2. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_k} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}t$

donde $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ es una partición del intervalo $[0,t]$.

Demostración

$\sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[W_{t_{k-1}} W_{t_k} - W_{t_{k-1}}^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} 2W_{t_{k-1}}W_{t_k} - \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}}^2 - \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}}^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} 2W_{t_{k-1}}W_{t_k} - \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}}^2 - \sum_{k=1}^{n} W_{t_k}^2 + W_t^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[W_t^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2\right] = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$

Por lo tanto,

$\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right]$

$= \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$

$\sum_{k=1}^{n} W_{t_k} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[W_{t_k}^2 - W_{t_k} W_{t_{k-1}}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[- \sum_{k=1}^{n} 2W_{t_{k-1}}W_{t_k} + \sum_{k=1}^{n} W_{t_k}^2 + \sum_{k=1}^{n} W_{t_k}^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[- \sum_{k=1}^{n} 2W_{t_{k-1}}W_{t_k} + \sum_{k=1}^{n} W_{t_k}^2 + \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}}^2 + W_t^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[W_t^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2\right] = \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$

Por lo tanto,

$\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_k} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right]$

$= \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 = \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}t$

Como puede verse, los dos límites de la proposición anterior son distintos por el hecho de que la variación cuadrática de (W_t) es distinta de cero.

8. La σ-álgebra previsible

Asumimos que tenemos una filtración $\{\Im_t : t \in \mathbb{R}^+\}$. Cuando se diga que un proceso $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, o $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}^+}$, está adaptado se asume que lo está a la filtración $\{\Im_t : t \in \mathbb{R}\}$.

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso estocástico, denotaremos por X a la función $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to R$ definida por $X(t,\omega) = X_t(\omega)$. Inversamente, si $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to R$ es una función tal que, para cada $t \in \mathbb{R}^+$ la función $\omega \to X(t,\omega)$ es una variable aleatoria, denotaremos por $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ al proceso estocástico formado por las variables aleatorias $X_t : \Omega \to R$, definidas por $X_t(\omega) = X(t,\omega)$. Si C es un subconjunto de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ y $t \in \mathbb{R}^+$, denotaremos por C_t a la función $\omega \to I_C(t,\omega)$, definida sobre Ω.

Definición 3. *Si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $a < b$, definamos $(a,b|$ de la siguiente manera:*

$$(a,b| = \begin{cases} (a,b] & \text{si } b \in \mathbb{R}^+ \\ (a,b) & \text{si } b = \infty \end{cases}$$

Definición 4. *Entenderemos por un rectángulo de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ un conjunto de la forma $(s,t| \times F$ ó $\{0\} \times F$, donde $s, t \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $s < t$ y $F \in \Im$. Diremos que el rectángulo $(s,t| \times F$ (resp. $\{0\} \times F$) está adaptado a la filtración $\left\{\Im_t : t \in \overline{\mathbb{R}}^+\right\}$ si $F \in \Im_s$ (resp. $F \in \Im_0$). Denotaremos por $\mathcal{R}$ a la familia de rectángulos adaptados y por $\mathcal{A}$ a la familia de conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^n E_j$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $E_1, \ldots, E_n$ son rectángulos en $\mathcal{R}$, ajenos por parejas.*

Se tiene:

i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

ii) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{R}$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{R}$.

iii) Si $E \in \mathcal{R}$, entonces $E^c \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es un π-sistema y $\mathcal{A}$ es un álgebra de subcontuntos de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

Obsérvese que si $E \in \mathcal{R}$, entonces el proceso $(X_u)_{u\in\mathbb{R}^+}$ definido por $X_u(\omega) = I_E(u,\omega)$ es continuo por la izquierda y está adaptado.

Definición 5. *La σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ generada por $\mathcal{R}$ es llamada la σ-álgebra previsible y la denotaremos por $\mathcal{P}$. Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es previsible si la función $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, definida por $X(t,\omega) = X_t(\omega)$, es $\mathcal{P}$-medible.*

Definición 6. *Diremos que una función $Z : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ es elemental si tiene la forma $Z = \sum_{k=1}^m b_k I_{E_k}$, donde $b_1, \ldots, b_m$ son números reales y $E_1, \ldots, E_m$ son elementos de $\mathcal{R}$. En ese caso, el proceso $(Z_u)_{u\in\mathbb{R}^+}$ definido por $Z_u(\omega) = Z(u,\omega)$ también será llamado elemental. El conjunto de procesos elementales será denotado por $\mathcal{E}$.*

Obviamente, todo proceso elemental es $\mathcal{P}$-medible.

Como $\mathcal{R}$ es un π-sistema, el producto de dos funciones elementales es una función elemental. En particular, como $I_{[0,t]\times\Omega} = I_{\{0\}\times\Omega} + I_{(0,t]\times\Omega}$ es elemental para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, si Z es una función elemental y $t \in \mathbb{R}^+$, entonces la función $ZI_{[0,t]\times\Omega}$, la cual denotaremos simplemente por $ZI_{[0,t]}$, es una función elemental.

También I_A es una función elemental para cualquier $A \in \mathcal{A}$.

Obviamente, el conjunto de funciones elementales es cerrada bajo sumas y multiplicación por un número real, así que forma un espacio vectorial.

Si $Z = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{E_k}$ es una función elemental y $\{d_1, \ldots, d_n\}$ es el conjunto formado por todos los distintos posibles valores no nulos de Z, definamos, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, $D_k = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : Z(t, \omega) = d_k\}$, entonces los conjuntos $D_1, \ldots, D_n$ son ajenos por parejas y $Z = \sum_{k=1}^{n} d_k I_{D_k}$. Esta última expresión será llamada la **representación canónica** de Z. Además, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $D_k \in \mathcal{A}$. En efecto:

Una función elemental Z tiene también las siguientes representaciones:

1) $Z = \sum_{k=1}^{n} c_k I_{C_k}$, donde $c_1, \ldots, c_n$ son números reales y $C_1, \ldots, C_n$ son elementos de $\mathcal{R}$ ajenos por parejas. En este caso, los coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ no necesariamente son distintos entre sí.

2) $Z = a_0 I_{\{0\}\times G_0} + \sum_{k=1}^{n} a_k I_{(t_{k-1}, t_k]\times G_k} + a_{n+1} I_{(t_n, t_{n+1})\times G_{n+1}}$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ son números reales, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ y $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < t_{n+1} = \infty$, $G_0 \in \mathcal{F}_0$ y, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $G_k \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$. En este caso alguno(s) de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ pueden ser iguales a cero.

Si μ es una medida definida sobre $\mathcal{P}$, denotaremos por $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$ al espacio $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu)$.

Lema 2. *Supongamos que μ es una medida finita definida sobre $\mathcal{P}$. Entonces, para cualquier $E \in \mathcal{P}$, I_E es límite en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$ de elementos en $\mathcal{E}$.*
Corolario 3. *Supongamos que μ es una medida finita definida sobre $\mathcal{P}$. Entonces, cualquier función simple $\mathcal{P}$-medible es límite en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$ de elementos en $\mathcal{E}$.*

Proposición 6. *Sea μ una medida definida sobre $\mathcal{P}$. Entonces, para cualquier función $f \in L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $\mathcal{E}$ y una sucesión no decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos $A_n \in \mathcal{P}$, de medida finita, tales que la sucesión $(f_n I_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$. Si la medida es finita, se puede tomar $A_n = \mathbb{R}^+ \times \Omega$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

9. Integrales estocásticas de procesos elementales

Si Z es una función elemental, entonces, para cada $\omega \in \Omega$, la función $s \to Z(s,\omega)$ de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ es escalonada. En efecto, Z admite la siguiente representación:

$Z = a_0 I_{\{0\}\times G_0} + \sum_{k=1}^n a_k I_{(t_{k-1},t_k]\times G_k} + a_{n+1} I_{(t_n,t_{n+1})\times G_{n+1}}$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ son números reales, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < t_{n+1} = \infty$, $G_0 \in \mathcal{F}_0$ y, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $G_k \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$.

Así que, si $s \in \mathbb{R}^+$:

$Z(s,\omega) = a_0 I_{G_0}(\omega) I_{\{0\}}(s) + \sum_{k=1}^n a_k I_{G_k}(\omega) I_{(t_{k-1},t_k]}(s) + a_{n+1} I_{G_{n+1}}(\omega) I_{(t_n,t_{n+1})}(s)$

Por lo tanto, si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función continua, la función $s \to Z(s,\omega)$ es Riemann-Stieljes integrable con respecto a f sobre cualquier intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}^+$.

Definición 7. *Para cada función elemental Z, $t \in \mathbb{R}^+$ y $\omega \in \Omega$, definamos:*

$\int_0^t Z_s(\omega)\, dM_s(\omega) = (RS) \int_0^t Z_s(\omega)\, dW_s(\omega)$

donde (RS) indica que se trata de una integral de Riemann-Stieltjes.

Para cada $t \in \mathbb{R}^+$, denotaremos por $\int_0^t Z_s dW_s$ a la función $\omega \to \int_0^t Z_s(\omega)\, dW_s(\omega)$

Teorema 6. *Sea $E \in \mathcal{R}$, $Z = I_E$ y, para $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \int_0^t Z_u dW_u$, entonces:*

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$.

El proceso $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_u^2 du\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$.

Demostración

Si $E = \{0\} \times F$, con $F \in \Im_0$, entonces, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = 0$ y $N_t^2 - \int_0^t Z_u^2 du = 0$, así que el resultado es trivial.

Supongamos ahora que $E = (a, b| \times F$, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^+$ tales que $a < b$ y $F \in \Im_a$.

Se tiene, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$:

$$N_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a) I_F & \text{si } a < t < b \\ (W_b - W_a) I_F & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

$$N_t^2 - \int_0^t Z_u^2 du = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)^2 I_F - (t-a) I_F & \text{si } a < t < b \\ (W_b - W_a)^2 I_F - (b-a) I_F & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

Obviamente, N_t y $N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds$ son $\Im_t$-medibles, de esperanza finita y nulas si $t = 0$.

Definamos, para $t \in \mathbb{R}^+$, $Y_t = N_t^2 - \int_0^t Z_u^2 du$.

Para $s < t$, se tiene:

$$N_t - N_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)I_F & \text{si } s \leq a < t < b \\ (W_t - W_s)I_F & \text{si } a < s < t < b \\ (W_b - W_s)I_F & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

Así que $E\left[N_t - N_s \mid \Im_s\right] = 0$, ya que $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es martingala.

$$Y_t - Y_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)^2 I_F - (t-a)I_F & \text{si } s \leq a < t < b \\ (W_t - W_a)^2 I_F - (W_s - W_a)^2 I_F - (t-s)\, I_F & \text{si } a < s < t < b \\ (W_b - W_a)^2 I_F - (W_s - W_a)^2 I_F - (b-s)I_F & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

Por lo tanto:

$E\left[Y_t - Y_s \mid \Im_s\right]$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ E\left[(W_t - W_a)^2 I_F - (t-a)I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } s \leq a < t < b \\ E\left[(W_t - W_a)^2 I_F - (W_s - W_a)^2 I_F - (t-s)\, I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < t < b \\ E\left[(W_b - W_a)^2 I_F - (W_s - W_a)^2 I_F - (b-s)I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ E\left[(W_t^2 - W_a^2)\, I_F - (t-a)I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } s \leq a < t < b \\ E\left[(W_t^2 - W_a^2)I_F - (W_s^2 - W_a^2)I_F - (t-s)\, I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < t < b \\ E\left[(W_b^2 - W_a^2)I_F - (W_s^2 - W_a^2)I_F - (b-s)I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ E\left[(W_t^2 - t)\, I_F - (W_a^2 - a)I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } s \leq a < t < b \\ E\left[(W_t^2 - t)I_F - (W_s^2 - s)\, I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < t < b \\ E\left[(W_b^2 - b)I_F - (W_s^2 - s)I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

Así que $E\left[Y_t - Y_s \mid \Im_s\right] = 0$, ya que $(W_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es martingala.

■

Proposición 7. *Sean $E, G \in \mathcal{R}$ ajenos, $U = I_E$ y $V = I_G$ entonces:*

El proceso $\left(\left(\int_0^t U_s dW_s\right)\left(\int_0^t V_s dW_s\right)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$.

Corolario 4. *Si Z es una función elemental y, para $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \int_0^t Z_s dW_s$, entonces:*

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$.

El proceso $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es una martingala continua y nula en* $t = 0$.

10. Extensión de la integral estocástica a los procesos en $L^2_{\mathcal{P}}$

Teorema 7. *Si $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso previsible en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_M)$, existe una única martingala continua nula en cero, $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, tal que:*

i) Si $\left(Z^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de procesos elementales que converge a Z en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_M)$, entonces, para cualquier $t\in\mathbb{R}^+$, la sucesión $\left(\int_0^t Z_s^{(n)} dM_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a N_t en $L^2(\Omega,\Im,P)$.

ii) $E\left[N_t^2\right] = E\left[\int_0^t Z_s^2 d\left\langle M,M\right\rangle_s\right]$ para cualquier $t\in\mathbb{R}^+$.

Sea $(Z_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado y continuo tal que $E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right] < \infty$, la integral estocástica $M_t = \int_0^t Z_s dW_s$ está entonces bien definida y tiene las siguientes propiedades:

1. $M_0 = 0$
2. $(M_t)_{t\geq 0}$ es un proceso continuo.
3. $(M_t)_{t\geq 0}$ es una martingala.
4. $M_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds$ es una martingala.
5. $\int_0^t Z_s dW_s = \text{lím}(P)\sum Z_{t_{k-1}}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$
6. $\int_0^t (aZ_s + bY_s) dW_s = a\int_0^t Z_s dW_s + b\int_0^t Y_s dW_s$

El proceso $\int_0^t Z_s^2 ds$ es llamado el **compensador de la martingala** M_t y se le denota por $\left\langle M,M\right\rangle_t$. Obsérvese que se trata de un proceso adaptado y no decreciente.

Proposición 8. *El proceso $A_t = \int_0^t Z_s^2 ds$ es el único proceso adaptado, no decreciente, nulo en cero y continuo tal que $M_t^2 - A_t$ es una martingala.*

Sea $(Z_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado y continuo y $M_t = \int_0^t Z_s dW_s$. Si $(Y_t)_{t\geq 0}$ es otro proceso adaptado y continuo, se define:

$$\int_0^t Y_s dM_s = \int_0^t Y_s Z_s dW_s$$

El proceso $N_t = \int_0^t Y_s dM_s$ está entonces bien definido y tiene las siguientes propiedades:

1. $N_0 = 0$
2. $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso continuo.
3. $(N_t)_{t\geq 0}$ es una martingala local.
4. Existe un único proceso $(A_t)_{t\geq 0}$ adaptado, no decreciente, nulo en cero y continuo tal que $M_t^2 - A_t$ es una martingala local.
5. $\int_0^t Y_s dM_s = \text{lím}(P)\sum Y_{t_{k-1}}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})$
6. $\int_0^t (aX_s + bY_s) dM_s = a\int_0^t X_s dM_s + b\int_0^t Y_s dM_s$
7. Si $(Z'_t)_{t\geq 0}$ es otro proceso adaptado y continuo y $M'_t = \int_0^t Z'_s dW_s$, entonces:
   $\int_0^t Y_s d(M_s + M'_s) = \int_0^t Y_s dM_s + \int_0^t Y_s dM'_s$

El siguiente resultado es clave para poder calcular integrales estocásticas.

Teorema 8. *Sea* $(Z_t)_{t\geq 0}$ *un proceso adaptado y continuo y sea* $M_t = \int_0^t Z_s dW$*, entonces:*

$$\lim_{\|P\|\to 0}(P)\sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2 = M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s$$

en donde $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ *es una partición del intervalo* $[0,t]$.

Demostración

$$\sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}^2 + M_{t_{k-1}}^2 - 2M_{t_{k-1}}M_{t_k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}^2 - M_{t_{k-1}}^2 + 2M_{t_{k-1}}^2 - 2M_{t_{k-1}}M_{t_k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[M_{t_k}^2 - M_{t_{k-1}}^2 - 2M_{t_{k-1}}\left(M_{t_t} - M_{t_{k-1}}\right)\right]$$

$$= M_t^2 - 2\sum_{k=1}^{n} M_{t_{k-1}}\left(M_{t_t} - M_{t_{k-1}}\right)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\|P\|\to 0}(P)\sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2 = M_t^2 - 2\lim_{\|P\|\to 0}(P)\sum_{k=1}^{n} M_{t_{k-1}}\left(M_{t_t} - M_{t_{k-1}}\right)$$

$$= M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s$$

∎

Corolario 5. *El proceso* $\langle M,M\rangle_t = M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s$ *es adaptado, no decreciente, nulo en cero y continuo.*

Corolario 6. $\int_0^t M_s dM_s = \frac{1}{2}M_t^2 - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_t$

Corolario 7. $\lim_{\|P\|\to 0}(P)\sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2 = \langle M,M\rangle_t$

donde $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ *es una partición del intervalo* $[0,t]$.

Al límite $\lim_{\|P\|\to 0}(P)\sum_{k=1}^{n}\left(M_{t_k}-M_{t_{k-1}}\right)^2$ se le llama la **variación cuadrática de** (M_t).

11. Fórmula de integración por partes

Sea $(Z_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado y continuo, y $M_t = \int_0^t Z_s dW_s$.

La fórmula $\int_0^t M_s dM_s = \frac{1}{2}M_t^2 - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M, M\rangle_t$$

Sea $(Y_t)_{t\geq 0}$ otro proceso adaptado y continuo y sea $N_t = \int_0^t Y_s dW$, entonces:

$$M_t + N_t = \int_0^t (Z_s + Y_s) dW_s$$

Así que:

$\langle M+N, M+N\rangle_t = \int_0^t (Z_s + Y_s)^2 ds = \int_0^t Z_s^2 ds + 2\int_0^t Z_s Y_s ds + \int_0^t Y_s^2 ds$

$= \langle M, M\rangle_t + \langle N, N\rangle_t + 2\int_0^t Z_s Y_s ds$

Además:

$M_t^2 + 2M_t N_t + N_t^2 = (M_t + N_t)^2$

$= 2\int_0^t (M_s + N_s) d(M_s + N_s) + \langle M+N, M+N\rangle_t$

$= 2\int_0^t M_s dM_s + 2\int_0^t M_s dN_s + 2\int_0^t N_s dM_s + 2\int_0^t N_s dN_s + \langle M+N, M+N\rangle_t$

$= M_t^2 - \langle M, M\rangle_t + N_t^2 - \langle N, N\rangle_t + 2\int_0^t M_s dN_s + 2\int_0^t N_s dM_s + \langle M+N, M+N\rangle_t$

$= M_t^2 + N_t^2 + 2\int_0^t M_s dN_s + 2\int_0^t N_s dM_s + 2\int_0^t Z_s Y_s ds$

Así que:

$$M_t N_t = \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t N_s dM_s + \int_0^t Z_s Y_s ds$$

En particular, se tiene que $M_t N_t - \int_0^t Z_s Y_s ds$ es una martingala (local).

Definamos:

$$\langle M, N\rangle_t = \int_0^t Z_s Y_s ds$$

Obsérvese que así definido, el proceso $B_t = \langle M, N\rangle_t$ es el único proceso adaptado, de variación acotada, nulo en cero y continuo tal que $M_t N_t - B_t$ es una martingala (local).

De esta manera, se puede escribir la **fórmula de integración por partes para martingalas (locales)**:

$$M_t N_t = \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t N_s dM_s + \langle M, N\rangle_t$$

12. Fórmula de Ito

Sea $X = A_t + M_t$, donde $(A_t)_{t\geq 0}$ es un proceso adaptado, de variación acotada, nulo en cero y continuo, y $M_t = \int_0^t Z_s dW_s$, donde $(Z_t)_{t\geq 0}$ es un proceso adaptado y continuo.

Vamos a expresar las potencias de X_t por dos razones muy importantes: 1. Al expresar esas potencias se mostrará de paso que los procesos $(X_t^n)_{t\geq 0}$ son semimartingalas. 2. Una vez que se tienen expresadas las potencioas de X_t se puede pasar inmediatamente a expresar un polinomio formado por una combinación lineal de potencias de X_t; el siguiente paso consistirá en la representación de una función $F(X_t)$, donde F es una función de clase C^2; es decir, una función con segunda derivada continua. Obtendremos de esta forma la fórmula de Ito, la cual es la herramienta básica para el manejo de las integrales estocásticas.

Ya tenemos X_t y X_t^2:

$X_t = \int_0^t dX_s$

$X_t^2 = 2\int_0^t X_s dX_s + \langle X, X\rangle_t$

Para expresar X_t^3 como semimartingala, vamos a utilizar la fórmula de integración por partes y el corolario **??**.

$X_t^3 X_t^3 = X_t^2 X_t = \int_0^t X_s dX_s^2 + \int_0^t X_s^2 dX_s + \langle X, X^2\rangle_t = 2\int_0^t X_s^2 dX_s + \int_0^t X_s d\langle X, X\rangle_s + \int_0^t X_s^2 dX_s + 2\int_0^t X_s d\langle X, X\rangle_s$

$= 3\int_0^t X_s^2 dX_s + 3\int_0^t X_s d\langle X, X\rangle_s$

Para expresar X_t^4 como semimartingala, vamos a utilizar la fórmula de integración por partes y la expresión que tenemos para X_t^3.

$X_t^4 = X_t^3 X_t = \int_0^t X_s dX_s^3 + \int_0^t X_s^3 dX_s + \langle X, X^3\rangle_t = 3\int_0^t X_s^3 dX_s + 3\int_0^t X_s^2 d\langle X, X\rangle_s + \int_0^t X_s^3 dX_s + \langle X, X^3\rangle_t$

Para terminar, necesitamos encontrar $\langle X, X^3\rangle_t$. Para esto, definamos $N_t = 3\int_0^t X_s^2 dM_s = 3\int_0^t X_s^2 Z_s dW_s$. Entonces:

$\langle X, X^3\rangle_t = \langle M, N\rangle_t = 3\int_0^t Z_s X_s^2 Z_s ds = 3\int_0^t X_s^2 Z_s^2 ds$

Pero:

$\langle X, X\rangle_t = \langle M, M\rangle_t = \int_0^t Z_s^2 ds$

Por lo tanto:

$\langle X, X^3\rangle_t = 3\int_0^t X_s^2 Z_s^2 ds = 3\int_0^t X_s^2 d\langle X, X\rangle_s$

Así que:

$X_t^4 = 3\int_0^t X_s^3 dX_s + 3\int_0^t X_s^2 d\langle X, X\rangle_s + \int_0^t X_s^3 dX_s + \langle X, X^3\rangle_t$

$= 3\int_0^t X_s^3 dX_s + 3\int_0^t X_s^2 d\langle X,X\rangle_s + \int_0^t X_s^3 dX_s + 3\int_0^t X_s^2 d\langle X,X\rangle_s$

$= 4\int_0^t X_s^3 dX_s + 6\int_0^t X_s^2 d\langle X,X\rangle_s$

Para tener una fórmula recursiva, escribamos los resultados de la siguiente forma:

$X_t = \int_0^t dX_s$

$X_t^2 = \int_0^t 2X_s dX_s + \frac{1}{2}2\langle X,X\rangle_t$

$X_t^3 = \int_0^t 3X_s^2 dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t (3)(2) X_s d\langle X,X\rangle_s$

$X_t^4 = \int_0^t 4X_s^3 dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t (4)(3) X_s^2 d\langle X,X\rangle_s$

De esta forma vemos que la fórmula recursiva podría ser la siguiente:

Definiendo $F(x) = x^n$, tenemos:

$F(X_t) = \int_0^t F'(X_t)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_t)\, d\langle X,X\rangle_s$

Teorema 9. $X_t^n = n\int_0^t X_s^{n-1} dX_s + \frac{1}{2}n(n-1)\int_0^t X_s^{n-2} d\langle X,X\rangle_s$

Demostración

Para $n = 1$ la igualdad es evidente.

Supogamos que es válida para $n = k$; es decir:

$X_t^k = k\int_0^t X_s^{k-1} dX_s + \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t X_s^{k-2} d\langle X,X\rangle_s$

Entonces:

$X_t^{k+1} = X_t^k X_t = \int_0^t X_s dX_s^k + \int_0^t X_s^k dX_s + \left\langle X, X^k\right\rangle_t$

$= k\int_0^t X_s X_s^{k-1} dX_s + \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t X_s X_s^{k-2} d\langle X,X\rangle_s + \int_0^t X_s^k dX_s + \left\langle X, X^k\right\rangle_t$

$= \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t X_s^{k-1} d\langle X,X\rangle_s + \left\langle X, X^k\right\rangle_t + (k+1)\int_0^t X_s^k dX_s$

Se tiene:

$X_t = A_t + M_t$

Definamos $N_t = \int_0^t kX_s^{k-1} Z_s dW_s$. Entonces:

$\left\langle X, X^k\right\rangle_t = \langle M,N\rangle_t = k\int_0^t Z_s X_s^{k-1} Z_s ds = k\int_0^t X_s^{k-1} Z_s^2 ds$

Pero:

$\langle X,X\rangle_t = \langle M,M\rangle_t = \int_0^t Z_s^2 ds$

Por lo tanto:

$\left\langle X, X^k \right\rangle_t = k \int_0^t X_s^{k-1} Z_s^2 ds = k \int_0^t X_s^{k-1} d \left\langle X, X \right\rangle_s$

Así que:

$X_t^{k+1} = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t X_s^{k-1} d \left\langle X, X \right\rangle_s + \left\langle X, X^k \right\rangle_t + (k+1) \int_0^t X_s^k dX_s$

$= \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t X_s^{k-1} d \left\langle X, X \right\rangle_s + k \int_0^t X_s^{k-1} d \left\langle X, X \right\rangle_s + (k+1) \int_0^t X_s^k dX_s$

$= (k+1) \int_0^t X_s^k dX_s + \frac{1}{2} k(k+1) \int_0^t X_s^{k-1} d \left\langle X, X \right\rangle_s$

Gracias a la linealidad de la integral, se obtiene, para un polinomio p :

$p(X_t) = p(X_0) + \int_0^t p'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t p''(X_s) d \left\langle X, X \right\rangle_s$

Mediante un proceso de límite, esta fórmula se extiende a todas las funciones $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2:

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d \left\langle X, X \right\rangle_s$$

Este resultado es conocido como la **fórmula de Ito**.

Se puede extender la fórmula de Ito al caso multidimensional. Para el caso de dos semimartingalas, (X_t) y (Y_t) y una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, la fórmula es como sigue:

$F(X_t, Y_t) = F(X_0, Y_0) + \int_0^t F_x(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t F_y(X_s, Y_s) dY_s$

$+ \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(X_s, Y_s) d \left\langle X, X \right\rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t F_{yy}(X_s, Y_s) d \left\langle Y, Y \right\rangle_s + \int_0^t F_{xy}(X_s, Y_s) d \left\langle X, Y \right\rangle_s$

La fórmula de Ito unidimensional puede escribirse en la forma siguiente:

$\int_0^t F'(X_s) dX_s = F(X_t) - F(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d \left\langle X, X \right\rangle_s$

En particular:

$\int_0^t F'(W_s) dW_s = F(W_t) - F(W_0) - \frac{1}{2} \int_0^t F''(W_s) ds$

También, como caso particular, se tiene:

$F(t, W_t) = F(0, W_0) + \int_0^t F_x(s, W_s) ds + \int_0^t F_y(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t F_{yy}(s, W_s) ds$

Así que:

$\int_0^t F_y(s, W_s) dW_s = F(t, W_t) - F(0, W_0) - \int_0^t F_x(s, W_s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t F_{yy}(s, W_s) ds$

Observemos que la funciones $t \rightarrow F''(W_t)$, $t \rightarrow F_x(t, W_t)$ y $t \rightarrow F_{yy}(t, W_t)$ son continuas, así que las integrales $\int_0^t F''(W_s) ds$, $\int_0^t F_x(s, W_s) ds$ y $\int_0^t F_{yy}(s, W_s) ds$ son integrales de Lebesgue.

13. Cálculo de integrales estocásticas

Las fórmulas anteriores nos permite realizar el cálculo de algunas integrales estocásticas, expresándolas en términos de integrales de Lebesgue. En particular, la fórmula del caso unidimensional nos permite calcular integrales estocásticas a partir del cálculo de la integral no estocástica indefinida correspondiente ya que si g es una función de clase C^2 y denotamos por f a su derivada, entonces se tiene $\int f(x)\,dx = g(x)$; aplicando entonces la fórmula de Ito, se obtiene:

$\int_0^t f(W_s)dW_s = g(W_t) - g(W_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(W_s)ds$

El procedimiento se puede mecanizar: si queremos obtener la integral estocástica $\int_0^t f(W_s)dW_s$, evaluamos la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ y, con la derivada de f, obtenemos inmediatamente la integral estocástica en términos de una integral de Lebesgue.

Ejemplos

1. Como $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ y la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$, entonces:

$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1}W_t^{n+1} - \frac{n}{2}\int_0^t W_s^{n-1}ds$

2. Como $\int e^x dx = e^x$ y la derivada de $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$, entonces:

$\int_0^t e^{W_s}dW_s = e^{W_t} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{W_s}ds$

3. Como $\int x^n e^x dx = e^x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k$ y la derivada de $f(x) = x^n e^x$ es $f'(x) = x^n e^x + nx^{n-1}e^x$, entonces:

$\int_0^t W_s^n e^{W_s}dW_s = e^{W_t}\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}W_t^k + (-1)^{n+1} - \frac{1}{2}\int_0^t \left(W_s^n e^{W_s} + nW_s^{n-1}e^{W_s}\right)ds$

4. Como $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$ y la derivada de $f(x) = \cos x$ es $f'(x) = -sen\ x$, entonces:

$\int_0^t \cos W_s dW_s = senW_t + \frac{1}{2}\int_0^t senW_s ds$

5. Como $\int sen\ x \cos x dx = \frac{1}{2}sen^2 x$ y la derivada de $f(x) = sen\ x\cos x = \frac{1}{2}sen(2x)$ es $f'(x) = \cos(2x)$, entonces:

$\int_0^t senW_s \cos W_s dW_s = \frac{1}{2}sen^2 W_t - \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2W_s)\,ds$

6. Como $\int xsenx\ dx = senx - x\cos x$ y la derivada de $f(x) = xsenx$ es $f'(x) = senx + x\cos x$, entonces:

$\int_0^t W_s senW_s dW_s = senW_t - W_t\cos W_t - \frac{1}{2}\int_0^t (senW_s + W_s\cos W_s)\,ds$

7. Como $\int e^x senx dx = \frac{1}{2}e^x\left(senx - \cos x\right)$ y la derivada de $f\left(x\right) = e^x senx$ es $f'\left(x\right) = e^x\left(senx + \cos x\right)$, entonces:

$\int_0^t e^{W_s} senW_s dW_s = \frac{1}{2}e^{W_t}\left(senW_t - \cos W_t\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^t e^{W_s}\left(senW_s + \cos W_s\right) ds$

8. Como $\int x^2\left(1-x\right)^n dx = -\frac{1}{n+3}\left(1-x\right)^{n+3} + 2\frac{1}{n+2}\left(1-x\right)^{n+2} - \frac{1}{n+1}\left(1-x\right)^{n+1}$ y la derivada de $f\left(x\right) = x^2\left(1-x\right)^n$ es $f'\left(x\right) = 2x\left(1-x\right)^n - nx^2\left(1-x\right)^{n-1}$, entonces:

$\int_0^t W_s^2\left(1-W_s\right)^n dW_s = -\frac{1}{n+3}\left(1-W_t\right)^{n+3} + 2\frac{1}{n+2}\left(1-W_t\right)^{n+2} - \frac{1}{n+1}\left(1-W_t\right)^{n+1}$

$-\frac{1}{n+3} - 2\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\int_0^t\left[2W_s\left(1-W_s\right)^n - nW_s^2\left(1-W_s\right)^{n-1}\right] ds$

Cuando el proceso a integrar depende tanto de t como de W_t, conviene utilizar la fórmula de Ito bidimensional.

9. Tomando $F\left(x,y\right) = x^n e^y$, se obtiene:

$t^n e^{W_t} = F\left(t, W_t\right) = n\int_0^t s^{n-1}e^{W_s} ds + \int_0^t s^n e^{W_s} dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t s^n e^{W_s} ds$

Así que:

$\int_0^t s^n e^{W_s} dW_s = t^n e^{W_t} - n\int_0^t s^{n-1}e^{W_s} ds - \frac{1}{2}\int_0^t s^n e^{W_s} ds$

10. Tomando $F\left(x,y\right) = e^{xy}$, se obtiene:

$e^{tW_t} = F\left(t, W_t\right) = 1 + \int_0^t W_s e^{sW_s} ds + \int_0^t s e^{sW_s} dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t s^2 e^{sW_s} ds$

Así que:

$\int_0^t s e^{sW_s} dW_s = e^{tW_t} - 1 - \int_0^t W_s e^{sW_s} ds - \frac{1}{2}\int_0^t s^2 e^{sW_s} ds$